Leçon 209 : Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications

Références : Rombaldi (Analyse), Zuily-Queffelec, El Amrani (Fourier)

I - Approximation polynomiale
  1) Approximation locale
  2) Approximation uniforme sur un compact
II - Approximation de fonctions intégrables
  1) Quelques résultats de densité
  2) Convolution et régularisation
III - Approximation de fonctions périodiques
  1) Polynômes trigonométriques et séries de Fourier
  2) Noyaux et convergence au sens de Césaro
  3) Convergence de la série de Fourier

DEV 1 : Bernstein et Weierstrass

DEV 2 : Fejer et convergence de la série de Fourier

Leçon 209 : Approximation d'une fonction par des fonctions régulières - Exemples d'applications

I - Approximation polynomiale

1) Approximation locale

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. [ROM]

THM 1 : (Taylor-Lagrange) Si f est une fonction à valeurs réelles définie sur un segment $[a;b]$ non réduit à un point de classe $\mathcal{C}^n$ sur ce segment et $n+1$ fois dérivable sur $]a;b[$.

$$\exists c \in]a;b[,\ f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

THM 2 : (Taylor avec reste intégral) Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n dt$$

THM 3 : (Taylor-Young) : Si f est n fois dérivable, alors, elle admet au voisinage de $a \in I$ un développement limité à l'ordre n :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x \to a}{o}((x-a)^n).$$

EX 4 : Au voisinage de 0, $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!}x^n + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$

$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (\alpha - i) + o(x^n)$.

REM 5 : L'utilisation de Taylor-Lagrange permet d'obtenir des inégalités : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x) - x| \leq \frac{|x|^3}{3!}$ ou encore $|e^x - 1 - x| \leq \frac{x^2}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^-$

THM 6 : Soit $I = [a;b]$ et $(x_i)_{i \in [\![0;n]\!]}$ une suite de réels deux à deux distincts dans I. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall i \in [\![0;n]\!]$, $P(a_i) = f(a_i)$. On l'appelle polynôme interpolateur de Lagrange de f.

2) Approximation uniforme sur un compact [ROM]

THM 7 : (Heine) Si K est un compact d'un espace métrique (E,d), alors toute fonction continue $f : K \to F$, où F est un espace métrique, est uniformément continue. [QUE] DEV 1

THM 8 : (Bernstein) Soit $f : [0;1] \to \mathbb{C}$ continue, ω son module de continuité uniforme i.e $\omega(h) = \sup\{|f(u) - f(v)| \,/\, |u-v| \leq h\}$. Pour $n \geq 1$, on considère $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$ le n-ième polynôme de Bernstein de f. Alors :

1) B_n converge uniformément sur $[0;1]$.
2) On a $\|f - B_n\|_\infty \leq C\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $C \in \mathbb{R}$

COR 9 : (Weierstrass) Toute fonction continue sur un segment est limite uniforme de fonctions polynomiales.

APPLI 10 : Soit $f : [0;1] \to \mathbb{C}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\int_0^1 f(t) t^n dt = 0$. Alors $f = 0$.

THM 11 : (Runge) Soit K un compact de $\mathbb{C}$ tel que $\mathbb{C} \setminus K$ est connexe. Pour tout $a \in \mathbb{C} \setminus K$, $z \mapsto \frac{1}{z-a}$ est limite uniforme sur K de polynômes.

THM 12 : (Stone-Weierstrass) Soit (X,d) un espace métrique compact et A une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ séparante ($\forall x \neq y \in X$, $\exists f \in A$, $f(x) \neq f(y)$), auto-conjuguée ($f \in A \Rightarrow \bar{f} \in A$) et contenant les fonctions constantes. Alors, A est dense dans $\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$.

II - Approximation de fonctions intégrables [ELAM]

Soit (S,T,m) un espace mesuré. Pour $p \in [1;+\infty]$, on note L^p l'espace des fonctions $\mathcal{L}^p$ quotienté par l'égalité presque partout

1) Quelques résultats de densité

THM 13 : L'espace des fonctions étagées intégrables est dense dans $L^p(S,T,m)$ ($p < \infty$).

- L'espace des fonctions étagées est dense dans $L^\infty(S,T,m)$

THM 14 : Ici $(S,T,m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On a

- L'espace des fonctions en escalier à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ ($p < \infty$)
- L'espace des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ ($p < \infty$).

2) Convolution et régularisation

On se place dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$

DEF 15 : Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. On appelle translatée de f par a et on note $\tau_a f$ la fonction $x \in \mathbb{R}^d \mapsto f(x-a)$.

THM 16 : (1) τ_a est une isométrie linéaire de $L^p(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même.

(2) Pour tout $p \in [1;+\infty[$, on a $\lim_{a \to 0} \|\tau_a f - f\|_p = 0$ (continuité des petites translations).

DEF 17: On dit que deux fonctions $f,g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ sont convolables lorsque pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable. On définit alors le produit de convolution $(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t)\,dt$

PROP 18: $*$ est commutative et bilinéaire

PROP 19: $Supp(f*g) \subset \overline{Supp(f)+Supp(g)}$

THM 20: Soient $f,g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors f et g sont convolables, $f*g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

NOT 21: On note $\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^d) = \{f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},\ \lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = 0\}$
$\mathcal{C}_b^{u_0}(\mathbb{R}^d) = \{f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ uniformément continues bornées$\}$

THM 22: Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ $(1 \leq p < \infty)$. Alors f et g sont convolables, $f*g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $\|f*g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.

THM 23: Soit $p \in [1;+\infty]$ et $q \in [1;+\infty]$ tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$. On a que $f*g$ est définie partout, $f*g \in \mathcal{C}_b^{u_0}(\mathbb{R}^d)$ et $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

EX 24: Pour $a, b > 0$, on pose $g_a(x) = e^{-a|x|}$. On a alors $g_a * g_b \in \bigcap_{p \in [1;+\infty]} L^p(\mathbb{R})$ et $g_a * g_b = \begin{cases} \frac{2}{a^2-b^2}(ae^{-b|x|} - be^{-a|x|}) & \text{si } a \neq b \\ e^{-a|x|}\left(\frac{1}{a} + |x|\right) & \text{si } a = b. \end{cases}$

PROP 25: $(L^1(\mathbb{R}^d), +, \cdot, *)$ est une algèbre de Banach non unitaire.

DEF 26: On appelle approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ toute suite $(\varphi_j)_{j \geq 1}$ de fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^d$ telles que
1) $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_j \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_j = 1$
2) $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{j \to +\infty} \int_{\|x\| > \varepsilon} \varphi_j(x)\,dx = 0$

EX 27: • Approximation de Laplace : $\varphi_j(x) = \frac{j}{2} e^{-j|x|}$
• Approximation de Cauchy : $\varphi_j(x) = \frac{j}{\pi} \frac{1}{1+j^2x^2}$
• Approximation de Gauss : $\varphi_j(x) = \frac{j}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{j^2x^2}{2}}$

THM 28: Soit $(\varphi_j)_{j \geq 1}$ une approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.
(1) Si $f \in \mathcal{C}_b^{u_0}(\mathbb{R}^d)$, alors $\|f*\varphi_j - f\|_\infty \xrightarrow[j \to +\infty]{} 0$
(2) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $p < \infty$, alors $\|f*\varphi_j - f\|_p \xrightarrow[j \to +\infty]{} 0$

THM 29: Soient $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R}^d)$. Si g est à support compact, alors $f*g$ est partout définie et de classe $\mathcal{C}^p$. De plus, pour tout $k \in [\![0;p]\!]$, pour tout $i \in [\![1;d]\!]$,
$$\frac{\partial^k}{\partial x_i^k}(f*g) = \frac{\partial^k g}{\partial x_i^k} * f$$

LEMME 30: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \rho_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\rho_\varepsilon \geq 0$, $supp(\rho_\varepsilon) \subset \overline{B}(0,\varepsilon)$ et $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon = 1$

DEF 31: On appelle suite régularisante dans $\mathbb{R}^d$ toute suite $(\rho_j)_{j \geq 1}$ telle que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $\rho_j \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\rho_j \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_j = 1$ et telle qu'il existe $(\varepsilon_j)_{j \geq 1}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ décroissante telle que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $supp(\rho_j) \subset B(0, \varepsilon_j)$.

REM 32: Toute suite régularisante est une approximation de l'unité.

THM 33: Soit $p \in [1;+\infty[$ et $(\rho_j)_{j \geq 1}$ une suite régularisante dans $\mathbb{R}^d$. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. On a :
• $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $f*\rho_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$ et $\lim_{j \to +\infty} \|f*\rho_j - f\|_p = 0$

COR 34: Pour tout $1 \leq p < \infty$, $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$

III - Approximations de fonctions périodiques [ELAM]

1) Polynômes trigonométriques et séries de Fourier

DEF 35: On note $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'espace des fonctions 2π-périodiques qui s'identifie à $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions continues sur le cercle unité $\mathbb{T}$ qui est compact.

DEF 36: On définit aussi l'espace $L^p_{2\pi}$ des fonctions 2π-périodiques de puissance p intégrable qu'on munit de la norme $\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$.

DEF 37: Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note e_n l'élément de $\mathcal{C}_{2\pi}$ donné par $e_n(x) = e^{inx}$.

PROP 38: La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est un système orthonormal de $L^2_{2\pi}$ appelé système trigonométrique.

DEF 39: Soient $f \in L^1_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On appelle n-ième coefficient de Fourier de f le nombre complexe $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$

REM 40: Pour $f \in L^2_{2\pi}$, on a $c_n(f) = \langle f | e_n \rangle$.

DEF 41: Pour $f, g \in L^1_{2\pi}$, $f*g$ est défini presque partout par $(f*g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-x)\, g(t)\, dt$

PROP 42 : (Riemann-Lebesgue) Si $f \in L^1_{2\pi}$, alors $\lim_{|n| \to +\infty} c_n(f) = 0$

DEF 43 : Pour $N \in \mathbb{N}$, f continue 2π-périodique, on définit sa somme partielle de Fourier $S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n$.
La série de Fourier est la série formelle $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n$

DEF 44 : Les coefficients de Fourier réels de $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ sont les $a_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$ et $b_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$ pour $n \in \mathbb{N}$.

PROP 45 : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$ et $b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$, de sorte que $S_N(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$

2) Noyaux et convergence au sens de Césarò

DEF 46 : Pour $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, on note $\sigma_N(f) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} S_k(f)$ la N-ième somme de Césarò de la série de Fourier de f.
On dit que la série $\sum c_n(f) e_n$ converge au sens de Césarò en x_0 lorsque $\lim_{N \to +\infty} \sigma_N(f)(x_0)$ existe et est finie.

PROP 47 : Si $S_N(f)(x_0)$ converge vers $l(x_0)$, il en va de même pour $\sigma_N(f)(x_0)$

DEF 48 : La fonction $D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n$ est appelé noyau de Dirichlet d'ordre $N \in \mathbb{N}$.

PROP 49 : (1) D_N est paire, 2π-périodique et vérifie que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)\,dx = 1$.
(2) D_N est le prolongement par continuité à $\mathbb{R}$ de la fonction $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\sin((2N+1)\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}$
(3) Pour tout $f \in L^1_{2\pi}$, $S_N(f) = f * D_N$.

DEF 50 : La fonction $F_N = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} D_j$ $(N \in \mathbb{N}^*)$ est appelé le noyau de Fejer d'ordre $N \in \mathbb{N}^*$.

PROP 51 : (1) $F_N = \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e_n$ et F_N est le prolongement par continuité de $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z} \mapsto \frac{1}{N}\frac{\sin^2(\frac{Nx}{2})}{\sin^2(\frac{x}{2})}$
(2) $F_N \geq 0$, $\|F_N\| = 1$ et $\sigma_N(f) = f * F_N$.
(3) F_N est une approximation de l'unité dans $L^1_{2\pi}$ DEV 2a)

THM 52 : (Fejer) (1) Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, alors $\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et $\|\sigma_N(f) - f\|_\infty \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$
(2) Si $f \in L^p_{2\pi}$, $p \in [1; +\infty[$, $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$ et $\|\sigma_N(f) - f\|_p \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$

COR 53 : Les polynômes trigonométriques sont denses dans $(L^p_{2\pi}, \|\ \|_p)$ pour $1 \leq p < \infty$ donc $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$.

COR 54 : On obtient la convergence L^2 des séries de Fourier de f vers f.

COR 55 : L'application $\begin{array}{l} L^1_{2\pi} \to c_0(\mathbb{Z}) \\ f \mapsto c_n(f) \end{array}$ est injective.

3) Convergence de la série de Fourier

THM 56 : (Parseval) Pour $f \in L^2_{2\pi}$, on a $\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$

APPLI 57 : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ en considérant $x \mapsto 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ 2π-pér. DEV 2b)

THM 58 : Soient $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors $\lim_{N \to +\infty} S_N(f)(x_0) = l \Rightarrow l = f(x_0)$
(2) Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et si $(S_N(f))$ converge simplement dans $\mathbb{R}$, alors $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

THM 59 : Si $f \in \mathcal{C}^1_{pm} \cap \mathcal{C}_{2\pi}$, alors $\sum c_n e_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et $f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e_n$.

THM 60 : (Dirichlet) Soit $f \in L^1_{2\pi}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ et $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ existent, que $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0^-)}{x - x_0^-}$ et $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0^+)}{x - x_0^+}$ existent. Alors $\lim_{N \to +\infty} S_N(f)(x_0) = \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$

APPLI 61 : L'équation de la chaleur (E) $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,\cdot) = u_0 \end{cases}$ admet une unique solution 2π-périodique continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ avec $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue $\mathcal{C}^1_{pm}$ 2π-périodique.